



ММО-61, II Давааны I шат

Т ангилал (Багш)

I өдөр: 2024 оны 12 сарын 14

Бодлого Т1. A, B эерэг тоонуудын хувьд \star үйлдлийг $A \star B = \frac{A}{AB + 1}$ гэж тодорхойлъё.

(1) $(A \star B) \star C = A \star (B + C)$ гэж батал.

(2) $((\dots(((1 \star 2) \star 3) \star 4) \dots) \star 59) \star 60) \star 61$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодлого Т2. a, b гэж эхлээд өмнөх хоёр үгийг нь залгаж бичих замаар байгуулсан $a, b, ab, bab, abbab, bababbab, \dots$ үгсийн дарааллын 3-р гишүүнээс хойших аль ч гишүүний хамгийн урд талын хоёр үсгийг дарахад палиндром үг үүснэ гэж батал. Энд ард, урдаасаа яг ижил уншигддаг үгийг *палиндром* үг гэж нэрлэдэг. Жишээ нь $ababa$ палиндром, $abab$ палиндром биш.

Бодлого Т3. $a! \cdot (a + 1)! = b!$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

II өдөр: 2024 оны 12 сарын 15

Бодлого Т4. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ нөхцөл биелдэг α, β, γ өнцгүүдтэй хурц өнцөгт гурвалжны хувьд

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \geq 2$$

болохыг баталж, тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

Бодлого Т5. C оройн өнцөг нь мохоо байдаг, тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. $BCHD$ параллелограмм байх H цэгийг авав. AH шулуун CD шулуунтай M цэгт, BC шулуунтай N цэгт огтлолцоно. H цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун, CD шулуунтай K цэгт, BC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв K, L, M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж байвал $\angle ABC = 90^\circ$ байна гэж батал.

Бодлого Т6. $P(X) = X^8 + 61X + 2025$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттой хоёр тогтмол биш олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.