

АРВАНДОЛООДУГААР ОЛИМПИАД

Улз сав нутгийн математикийн 17 дугаар олимпиад 2008 оны 10 сарын 3-5-ны өдрүүдэд Цагаан-Овоо сургууль дээр явагдаж, Дорнод аймгийн төв хөдөөгийн 21 сургууль, Хэнтий аймгийн Тэмүүжин цогцолбор сургуулийн 127 сурагч, 50 багш оролцов.

3.Буянжаргал захиралтай сургуулийн хамт олон зохион байгуулалтыг чанартай хийж, багийн дүнгээр Р.Мөнхзул ахлагчтай Номт наран сургуулийн баг тэргүүлж, шилжин явах цомын эзэн болов.

7-р анги

7-р ангийн төрөлд 21 сургуулийн 26 сурагч оролцон тус бүр 7 оноо бүхий 5 бодлого бодохоос 1-р сургуулийн сурагч Ч.Гүнж 26 оноогоор түрүүлж, 25.5 оноогоор 8-р сургуулийн сурагч Г.Ариунбаатар, 24.5 оноогоор 12-р сургуулийн сурагч П.Батболд нар удаах байруудыг эзэллээ.

A1. Зогсоолоос голын урсгал дагуу А суурин хүрэхээр нэг завь, урсгал сөрж В суурин хүрэхээр өөр нэг завь зэрэг хөдлөв. Завинууд А болон В суурингуудад харгалзан 5 ба 9 цагийн дараа хүрсэн бөгөөд хүрсэн даруйдаа хоёул буцаж В ба А суурин хүрэхээр хөдөлсөн байна. Ингээд зогсоолоос голын урсгал дагуу 20 км зайд уулзжээ. А ба В суурингийн хоорондох зай 200 км бол голын урсгалын хурдыг ол.

A2. 2;5;7-д хуваагддаг боловч 3-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг хамгийн бага натурал тоог ол.

A3. 12;13;26;18 гэсэн дөрвөн тоо өгөгджээ. Энэ дөрвөн тооны гурваар нь гурван талаа хийсэн гурвалжин хэдийг байгуулж болох вэ?

A4. Аймагт долоон ахлах сургууль байдаг. Аймагас 20 компьютерийг эдгээр сургуулиудад хуваарилжээ. Ижил тооны компьютер авсан хоёр сургууль олдох уу? Яагаад? (Компьютер аваагүй сургууль байж болно.)

8-р анги

8-р ангийн төрөлд 21 сургуулийн 31 сурагч оролцож 35 оноо авахаас 8 оноогоор 5-р сургуулийн сурагч Б.Анхцэцэг түрүүлж, 5.5 оноогоор Шинэ хөгжил цогцолбор сургуулийн сурагч Э.Төмөрчөдөр, 5 оноогоор 12-р сургуулийн сурагч Ц.Ууганцэцэг нар удаах байруудыг эзлэв.

B1. Мастер 1 цагт 4-өөс их, харин сурагч түүнээс 2-оор бага деталь үйлдвэрлэдэг. Захиалгыг мастер бүхэл тооны цагт гүйцэтгэдэг, харин 3 сурагч хамтдаа мастераас 2 цагаар бага хугацаанд гүйцэтгэдэг. Хичнээн захиалга ирсэн бэ?

B2. $n^5 + 2$ нь $n + 2$ -д хуваагддаг байх бүх натурал n -г ол.

B3. ABC гурвалжны AB талын дундаж D цэг, харгалзан CA, CB талууд дээр орших дурын E, F цэгийн хувьд DEF гурвалжны талбай $DBF; DAE$ гурвалжнуудын талбайн нийлбэрээс хэтрэхгүй гэж батал.

B4. Хоёр сурагч 32 шагайнаас авсан шагайн тоо нь 1 эсвэл анхны тоо байхаар ээлжлэн авч тогложээ. Сүүлчийн хэсэг шагайг авсан нь хожих бол хэн нь хожих вэ?

$$B5. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ тэгшитгэл бод.}$$

9-р анги

9-р ангийн төрөлд 20 сургуулийн 27 сурагч оролцож 35 оноо бүхий 5 бодлогоноос 14 оноогоор 1-р сургуулийн сурагч Б.Мөнхтогтох түрүүлж, 13 оноогоор Номт наран сургуулийн сурагч А.Бат-Орших, 8.5 оноогоор 8-р сургуулийн Б.Ундарьяа нар эзлэв.

C1. $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

C2. $9[x] - 48\{x\} = 0$ тэгшитгэл хэдэн шийдтэй вэ?

C3. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ байх $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ сөрөг биш тоонуудын хувьд $(3 + a_1)(3 + a_2)(3 + a_3)(3 + a_4)(3 + a_5) \geq 1024 \cdot (1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)(1 - a_4)(1 - a_5)$ болохыг батал.

C4. А хотоос явган хүн, түүнээс 4 цагийн дараа дугуйтай хүн, дугуйтай хүнээс 1 цагийн дараа мотоциклтой хүн тус тус В хот руу гарчээ. Тэд тус бүр өөрсдийнхөө хурдаар явцгааж нэгэн цэгт бүгд зэрэгцэний дараа В хотод мотоциклтой хүн, мотоциклтой хүнээс хэсэг хугацааны дараа дугуйчин, мотоциклтой хүнээс 2 цагийн хойно явган хүн тус тус очжээ. Тэгвэл дугуйчин явган хүнээс хэдэн минутын өмнө В хотод очсон вэ?

C5. Хүснэгтийн хэсэг нүдийг хөрш нүднүүд нь ялгаатай байхаар 10 өнгөөр будав. Бүх боломжит будагдсан хөрш нүднүүдийн хос олддог байхаар хамгийн багадаа хэдэн нүд будах вэ?

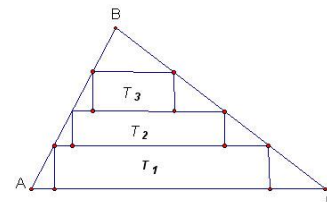
10-р анги

10-р ангийн төрөлд 17 сургуулийн 21 сурагч ороцлож 35 оноо бүхий 5 бодлогоноос 18 оноогоор 8-р сургуулийн сурагч Э.Соёлжингоо түрүүлж, 14 оноогоор Номт наран сургуулийн сурагч Ц.Хулан, 13 оноогоор Хан-Уул цогцолбор сургуулийн сурагч Х.Гүнбат нар удаах байруудыг эзлэв.

D1. $n \geq k$ үед $C_n^k; C_{n+1}^k; \dots; C_{n+k}^k$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч нь 1 байхыг батал.

D2. 3,7,14,24,... дарааллын хувьд хөрш хоёр тооны ялгаваруудаар арифметик прогресс үүснэ. Тэгвэл өгөгдсөн дарааллын 100 дахь гишүүнийг ол.

D3. ABC хурц өнцөгт гурвалжин өгөгджээ. $T_1; T_2; T_3$ нь тэгш өнцөгтүүд болог. $\frac{S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3}}{S_{ABC}}$ харьцааны хамгийн их утгыг ол.



D4. 3-д хуваагддаг бөгөөд 6 цифрээр төгсдөг таван оронтой тоо хичнээн байх вэ?

D5. Усан санд гурван хоолой байв. Усан санг II ба III хоолойг зэрэг ажиллуулахад I ба II хоолойг зэрэг ажиллуулахаас 5 цаг 20 минут илүү хурдан хугацаанд дүүргэнэ. Хэрэв II хоолойгоор усан санд ус юүлж, харин III хоолойгоор ус гадагш юүлэхэд I ба II хоолойгоор зэрэг энэхүү усан сангаас 2 дахин их эзлэхүүнтэй усан санг дүүргэхээс 21/16 бага хугацаанд дүүргэдэг. I ба III хоолойг зэрэг ажиллуулахад 8 цагаас илүү хугацаа зарцуулдаг бол I ба II хоолойг зэрэг ажиллуулахад усан санг ямар хугацаанд дүүргэх вэ?

11-р анги

11-р ангийн төрөлд 16 сургуулийн 22 сурагч оролцож 35 оноо бүхий 5 бодлогоноос 18 оноогоор 1-р сургуулийн сурагч Б.Цогтбаатар түрүүлж, 17.5 оноогоор 5-р сургуулийн сурагч Э.Цэндмаа, 17 оноогоор 5-р сургуулийн сурагч Э.Отгонбаяр нар удаах байруудыг эзлэв.

E1. Гурван анхны тоо өгөгдсөн ба дурын хоёрынх нь үржвэр бүтэн квадратаас 6-аар их бол эдгээр тоонуудын нийлбэр нь бүтэн квадратаас 9-өөр их гэж батал

E2. $f(x) = 20x^2 + 10x + 2008$ бол $f'(2) + f'(4) + \dots + f'(2008)$ нийлбэрийг ол.

E3. $\frac{8}{3(\cos^2 x + 2\cos x + 4)} - \frac{2}{\cos^2 x + 4\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{12\cos^4 \frac{x}{2}} = 0$ тэгшитгэлийг бод.

E4. $2\sqrt{7}$ радиустай тойрогт $ABCD$ трапец багтах ба түүний AD ссурь нь тойргийн диаметр болно. Хэрэв $\angle BAD = 60^\circ$ ба CE хөвч AD диаметртэй $AP:PD = 1:3$ байхаар огтлолцох бол BPE гурвалжны талбайг ол.

E5. $4a = x^2 + 3y^2$ бол $a = x_1^2 + 3y_1^2$ болохыг батал.

Бага ангийн багш

Бага ангийн багш төрөлд 19 сургуулийн 25 багш оролцож 35 оноо 5 бодлогоноос 9.5 оноогоор Номт наран сургуулийн багш Ж.Батдулам түрүүлж, 8.5 оноогоор Номт наран сургуулийн багш Д.Оюунбилэг, 8.1 оноогоор 1-р сургуулийн багш Б.Туяа нар удаах байруудыг эзлэв.

F1. 12 элементтэй олонлогоос тус бүр нь 2 элементтэй 6 олонлогийг хэдэн янзаар авах вэ?

F2. 5;13;25;41;61;... дарааллын эхний 2008 гишүүний нийлбэрийг ол.

F3. Самбарт гурван тоо бичигдсэн байна. Эдгээр тоонуудыг арилгаад, оронд нь тэдгээрийн үржвэр, нийлбэр, хосолсон үржвэрүүдийн нийлбэрийг бичихэд анх байсан тоонууд бичигдсэн байв. Анх ямар тоонууд бичигдсэн байсан вэ?

F4. α, β, γ нь хурц өнцөгт гурвалжны өнцгүүд болог. Хэрэв $\alpha < \beta < \gamma$ бол $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$ байхыг батал.

F5. Паралелограммд багтсан гурвалжны талбай нь энэ параллелограммын талбайн хагасаас их байж болохгүй гэдгийг батал.

Дунд ангийн багш

Дунд ангийн багш төрөлд 20 сургуулийн 25 багш оролцож 35 оноо 5 бодлогоноос 25 оноогоор Номт наран сургуулийн багш Р.Мөнхзул түрүүлж, 19 оноогоор Цагаан-Овоо сургуулийн багш Б.Дулмаа, 18 оноогоор 1-р сургуулийн багш Д.Энхтуяа нар удаах байруудыг эзлэв.

G1. А) $P(x, y) = 4 + x^2y^2 + x^4y^2 - 3x^2y^2$ олон гишүүнтийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

Б) $P(x, y)$ олон гишүүнтийг x ба y хувьсагчуудаас хамаарсан олон гишүүнтүүдийн квадратуудын нийлбэр дүрсэд тавьж болохгүй гэдгийг батал.

G2. ABC гурвалжин нь $\sqrt{3} - 1$ радиустай тойрогт багтана. Хэрэв $\angle BAC = 60^\circ$ ба BC тал болон AB, AC талуудын үргэлжлэлийн шүргэсэн тойргийн радиус нь 1 бол өгөгдсөн гурвалжны ABC ба ACB өнцгүүдийг ол.

G3. Зургаатын тооллын системд тэгээс ялгаатай цифрүүдээр бичигдэх n оронтой бүх тооны нийлбэрийг ол.

G4. $\{a_n\}$ өсдөг арифметик прогресс натурал тооны кубыг агуулдаг, натурал тооны дөрвөн зэрэгтийг агуулдаг бол мөн натурал тооны 12 зэрэгтийг агуулна гэж батал.

G5. Тус бүр 1 кг-аас хэтрэхгүй хэсэг чулууны нийт жин 20 кг-аас үл хэтрэнэ. 3 кг даацтай жигнүүрээр хамгийн цөөндөө хичнээн удаа жигнэж нийт шулууны жинг мэдэж болох вэ?