

# АРВАННАЙМДУГААР ОЛИМПИАД

Улз сав нутгийн математикийн 18 дугаар олимпиад 2009 оны 10 сарын 9-11-ний өдрүүдэд Сэргэлэн сумын сургууль дээр явагдаж, аймгийн төв хөдөөгийн 20 сургуулийн 126 сурагч, 46 багш оролцов. П.Эрдэнэцэцэг захиралтай сургуулийн хамт олон чанартай зохион байгуулан багийн дүнгээр Ц.Алдармаа ахлагчтай 5-р сургуулийн баг тэргүүлж шилжин явах цомын эзэн болов.

## 7-р анги

*7-р ангийн төрөлд 28 сурагч оролцон 5-р сургуулийн сурагч Г.Эрчиссаран түрүүлж, 1-р сургуулийн сурагч Э.Тамир, Хан-Уул сургуулийн сурагч С.Түвшинжаргал нар удаах байруудыг эзэлсэн.*

**A1.**  $\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4}$  илэрхийллийн утгыг ол.

**A2.**  $99^{20}$ ;  $9999^{10}$  хоёр тоог жиш.

**A3.** Фермерчин өдөрт 6 адуу, 40 үхрийг 472 кг өвсөөр тэжээнэ. Харин 12 адуу 37 үхрийг 514 кг өвсөөр тэжээнэ. Тэгвэл 10 сарын 15-наас 3 сарын 25 хүртэл 30 адуу 90 үхрийг ямар хэмжээний өвсөөр тэжээх вэ? / Энэ жил өндөр жил биш/

**A4.** Зоос цуглуулагчийн цуглуулганд орсон зоос бүрийн диаметр 10 см-ээс хэтрэхгүй. Хэрэв бүх зоосоо 70x30 см хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд багтааж болдог бол 60x40 см хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд багтааж болохыг батал. /Зоос давхардахгүй./

**A5.** Хоёр хүн үнэт эрдэнэс нуужээ. Сумын төвийн газрын зураг дээр тэгш өнцөгт координатын систем зурж, нэгж сонгон аваад ОЙН ЗАХАД БАЙДАГ ХУДАГ (3;4) ДЭЛГҮҮР (-2;-1) ШУУДАН (3;0) ГЭР (0;3) координаттай болохыг тодорхойлов. Эрдэнэс гэр шуудан ба дэлгүүр худаг хоёрыг холбосон шулууны огтлолцолд бий. Хоёр хүн эрдэнэсээ хаана нуусан бэ?

## 8-р анги

*8-р ангийн төрөлд 26 сурагч оролцон 5-р сургуулийн сурагч Э.Бөртэ түрүүлж, 8-р сургуулийн сурагч Г.Ариунбаатар, 5-р сургуулийн сурагч М.Дөлгөөн нар удаах байруудыг эзэлсэн.*

**B1.** Голынх нь цифрийг дарахад үүсэх хоёр оронтой тоон дээр 8-ыг нэмж, 8 дахин нэмэгдүүлсэнтэй тэнцүү байдаг бүх гурван оронтой тоог ол.

**B2.** 3 талтай квадратын оройнууд цагийн зүүний чиглэлд зэрэгцээ орой руугаа нэгэн зэрэг ижил хурдтайгаар хөдөлж, нийт замынхаа  $\frac{1}{3}$  хэсгийг яваад зогсоно. Үүссэн байдлаас дээрхи маягаар цэгүүд үргэлжлэн хөдөлнө. Хэдэн алхамын дараа эдгээр дөрвөн цэг нэгж радиустай дугуйд агуулагдах вэ?

**B3.** 1,2,3,4,... , 10 тоонуудын аль ч дараалсан гурвынх нь нийлбэр 15-аас ихгүй байхаар байрлуулж болох уу. Хариуг тайлбарла.

**B4.** Үйлдлийн тэмдэг болон хаалт хэрэглэн зөв тэнцэтгэл гарга.  $\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3009} = 2006$

**B5.** 3x10 хүснэгт өгөгдөв. Хоёр хүүхэд ээлжлэн 1x1 эсвэл 2x2 эсвэл 3x3 хүснэгтийг будаж тоглож байв. Хэрэв будагдсан нүдийг дахиж будахгүй бөгөөд нүүдэл хийх боломжгүй нь хожигддог бол хэрхэн зөв тоглож хэн нь хожих вэ?

## 9-р анги

9-р ангийн төрөлд 26 сурагч оролцон Чойбалсан сургуулийн сурагч Г.Болд-Эрдэнэ түрүүлж, Flower сургуулийн сурагч Н.Өлзий, 5-р сургуулийн сурагч Б.Балжмаа нар удаах байруудыг эзлэв.

**C1.**  $\overline{xy} = \sqrt{ztuv}$  нөхцлийг хангадаг  $\overline{xy}$ ,  $\overline{zt}$ ,  $\overline{uv}$  гэсэн хоёр оронтой тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг бол уул тоонуудыг ол.

**C2.** 
$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$$
 систем тэгшитгэл бод.

**C3.** Аливаа эерэг бүхэл  $n$ -ийн хувьд  $u(n)$  –ээр  $n$ -ээс хэтрэхгүй хамгийн их анхны тоог,  $v(n)$  –ээр  $n$ -ээс их хамгийн бага анхны тоог тус тус мэдэглэе.

$$\frac{1}{u(2) \cdot v(2)} + \frac{1}{u(3) \cdot v(3)} + \dots + \frac{1}{u(2010) \cdot v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$
 гэж батал

**C4.**  $ABC$  гурвалжны  $\angle ABC = 2 \cdot \angle ACB$  бол 1.  $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$  2.  $AB + BC < 2 \cdot AC$  гэж батал.

**C5.** Ажилчин 5 ширхэг зоос үйлдвэрлэхдээ 2 зоосыг өөр материалаар андуурч хийсэн байв. (Бүх зэвс ижил харагдана.) Ахлагч нь 2 ширхэг хуурамч зоос байгаа бөнөөд бусдаасаа жингээрээ ялгаатай боловч өөр хоорондоо тэнцүүг нь мэдэж байв. Ажилчин өөрөө яг аль зооснууд хуурамч гэдгийг, мөн дээр нь тэдгээр нь бусдаасаа хөнгөн гэдгийг мэдэж байлаа. Тэр туухайгүй тавган жинлүүр ашиглан 2 жинлээд хуурамч 2 зоос аль нь болох, мөн жинхэнэ зоосноосоо хөнгөн гэдгийг ахлагчдаа харуулах хэрэгтэй болов. Тэр ингэж чадах уу.

## 10-р анги

10-р ангийн төрөлд 26 сурагч оролцон 1-р сургуулийн сурагч А.Наранцацрал түрүүлж, 5-р сургуулийн сурагч Б.Баярхүү, Дашбалбар сургуулийн сурагч П.Аригунтэнгэр нар удаах байруудыг эзлэв.

**D1.**  $y = x^2 + x - 41$  ба  $x = y^2 + y - 40$  параболуудын огтлолын цэг ямар муруй байх вэ?

**D2.**  $ABCD$  параллелограммын  $AB$  ба  $AC$  талууд дээр  $ABM$  ба  $BCN$  зөв гурвалжнууд байгуулав. Тэгвэл  $DMN$  нь зөв гурвалжин болохыг батал.

**D3.**  $x^2 + y^2 = 2009^5$  тэгшитгэлийн ядаж нэг натурал тоон шийдийг ол.

**D4.** Дурын квадратыг таваас олон дурын тооны квадратуудад хувааж болохыг батал.

**D5.**  $\frac{\overbrace{aaa \dots a}^b}{b \text{ ширхэг}} - \frac{\overbrace{bbb \dots b}^a}{a \text{ ширхэг}}$  ялгавар анхны тоо байхаар  $a, b$  цифрүүд олдох уу

## 11-р анги

11-р ангийн төрөлд 20 сурагч оролцон 8-р сургуулийн сурагч Э.Соёлжингоо түрүүлж, Хан-Уул сургуулийн сурагч Х.Гүенбат, Дашбалбар сургуулийн сурагч М.Мөнх-Эрдэнэ нар удаах байруудыг эзэлсэн.

**E1.** Хэрэв  $p$  нь 7-оос их анхны тоо бол  $p^4 - 1$  нь 240-д хуваагдахыг батал.

**E2.**  $ABC$  гурвалжны оройгоос гарсан биссектрисс нь  $CD$  бөгөөд  $DE$  ба  $DK$  нь харгалзан  $ADC, BDC$  гурвалжнуудын биссектрисс бол  $|AD|^2 + |BD|^2 = (|AE| + |BK|)^2$  болохыг батал.

**E3.**  $a$  талтай квадрат төмөр ялтасны дөрвөн булангаас  $\frac{a_1}{a} = \lambda = const$  байх  $a_1$  талтай квадратуудыг огтлон авчээ. Үлдсэн дүрсийг нугалж сав хийхэд эзлэхүүн нь  $V_1$  байв.  $a_1$  талтай

квадрат тус бүрээс  $\frac{a_2}{a_1} = \lambda$  байх  $a_2$  талтай квадратыг ялган авч үлдсэн дүрсээр нь  $V_2$  эзлэхүүнтэй сав хийв. Энэ үйлдлийг төгсгөлгүй үргэлжлүүлсэн бол  $\sum_{i=1}^{\infty} V_i$  -хамгийн их утгаа авах  $\lambda$  тоог ол.

**E4.**  $2006^{\frac{1}{18}} + 2008^{\frac{1}{18}} + 2010^{\frac{1}{18}} + 2012^{\frac{1}{18}}$  ба  $4 \cdot 2009^{\frac{1}{18}}$  тоонуудыг жиш.

**E5.**  $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$  тэгшитгэл бод.

### Бага ангийн багш

*Бага ангийн багш төрөлд 22 багш оролцон 8-р сургуулийн багш Б.Бямбасүрэн, Цагаан-Овоо сургуулийн багш Н.Сарангэрэл, Чойбалсан сургуулийн багш Ж.Ганзориг нар удаах байруудыг эзлэв.*

**F1.**  $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$  илэрхийллийг үржигдхүүн болгон задла.

**F2.** Элдэв талт  $ABC$  гурвалжны хүндийн төв, өндрүүдийн огтлолцлын цэг, уул гурвалжинд багтсан тойргийн төв цэгийг харгалзан  $M, H, K$  үсгээр тэмдэглэе.  $MHK$  гурвалжин мохоо өнцөгт болохыг батал.

**F3.**  $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 30$  тэгшитгэл бод.

**F4.**  $a \cdot b \cdot c \neq 0$  ;  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 4$  ;  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 5$  бол  $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$  илэрхийллийн утгыг ол.

**F5.** Бүхэл коэффициент бүхий  $P(x)$  олон гишүүнтийн сул гишүүн модулиараа 1000-аас бага ба  $P(19) = P(94) = 1994$  бол сул гишүүнийг ол.

### Дунд ангийн багш

*Математикийн багш төрөлд 24 багш оролцон Номт наран сургуулийн багш Р.Мөнхзул түрүүлж, 1-р сургуулийн багш Д.Энхтуяа, Хан-Уул сургуулийн багш Д.Энхбат нар удаах байруудыг эзлэв.*

**G1.**  $a, b, c$  эерэг тоонууд бол  $a + b + c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$  байхыг батал.

**G2.**  $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169$ ,  $y^2 + z^2 = 50$ ,  $x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$  тэгшитгэлүүдийн шийд болдог эерэг бодит  $x, y, z$  тоонуудын утгыг ололгүйгээр  $xy + yz + zx$  илэрхийллийн утгыг ол.

**G3.**  $\cos\left(\arctg\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$  -ийн утгыг ол.

**G4.**  $f(x, y)$  нь аливаа натурал  $n, m$  -ын хувьд

$$f(1,1) = 1 \quad (1)$$

$$f(n+1, m) + f(n, n+1) = f(n, m) \quad (2)$$

$$m \cdot f(n+1, m) = n \cdot f(n, m+1) \quad (3) \quad \text{нөхцлүүдийг хангадаг функц бол } f(2009, 18)$$

--ийг ол.

**G5.**  $x^{12} - 28x^6 + 27 = 0$  тэгшитгэл бод. Шийдийн тоог ол.