

## ХОРИН ДОЛООДУГААР ОЛИМПИАД

Улз сав нутгийн математикийн 27 дугаар олимпиад 2018 оны 10 сарын 19-21-ний өдрүүдэд Дашбалбар сумын сургууль дээр явагдаж аймгийн төв хөдөөгийн 18 сургуулийн 222 сурагч 49 багш оролцов.

Д.Байгалмаа захиралтай Дашбалбар сумын сургууль зохион байгуулж, сумын ЗДТГ болон тус сургуулийн математикийн аймгийн олимпиадын үе үеийн аваргууд шагналын санг ивээн тэтгэсэн ба багийн дүнгээр Г.Михлай ахлагчтай 8-р сургуулийн баг түрүүлж шилжин явах цомын эзэн боллоо.



### 7-р анги

7-р ангийн төрөлд 57 сурагч оролцон Flower сургуулийн сурагч Х.Ундрах түрүүлж, 5-р сургуулийн сурагч Б.Шинэхүү, 1-р сургуулийн сурагч Б.Золбаяр нар удаах байруудыг эзлэв.

**A1.** 2018 оны 9 сарын 1-ны өдөр Бямба гариг байлаа. Хамгийн ойрхондоо хэдэн онд энэ өдөр давтагдах вэ?

**A2.** Гурвалжны талын урт  $a, b$  ба  $c$  нь  $a + b - c = 2$ ;  $2ab - c^2 = 4$  нөхцлүүдийг хангах бол энэ гурвалжин адил талт гэж батал.

**A3.** Хайрцагт 65 бөмбөг байв. Түүний 8 нь цагаан, үлдсэн нь хар бөмбөг байв. Хайрцагнаас нэг удаагийн авалтаар хамгийн олондоо 5 бөмбөг авахыг зөвшөөрнө. Авсан бөмбөгийг буцааж хийхгүй. Тэгвэл хайрцагнаас ядаж нэг цагаан бөмбөг авахын тулд хамгийн багадаа хэдэн авалт хийх вэ?

**A4.** А хотоос В хот хүрдэг хурдын замын км тутамд В хот хүртэл хэдэн км үлдсэнийг тэмдэглэсэн шон байв. УБ хотоос гарсан тогтмол хурдтай машин 9 цагт  $\overline{ABC}$  тоо бичигдсэн шонгийн хажуугаар, 12 цагт  $\overline{BCA}$  тоо бичигдсэн шонгийн хажуугаар, 15 цагт  $\overline{CAB}$  тоо бичигдсэн шонгийн хажуугаар гарчээ. ( $A, B, C$  нь ялгаатай цифрүүд). Машины хурдыг ол.

**A5.** Сурагч 2 оронтой тооны цифрүүдийн үржвэрийг олж, гарсан тоо нь 2 оронтой бол мөн цифрүүдийн нь үржвэрийг бодно. Ийм зарчмаар бүх 2 оронтой тоонууд гарган авчээ. Жишээлбэл:  $91 \rightarrow 9 \cdot 1 = 9$  тоог,  $66 \rightarrow 6 \cdot 6 = 36 \rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \rightarrow 1 \cdot 8 = 8$ . Үүсэх 1 оронтой тоонууд дотор 0-ийн цифр хэд байх вэ?

### 8-р анги

8-р ангийн төрөлд 50 сурагч оролцон Шинэ хөгжил сургуулийн Э.Энхжаргал түрүүлж, 8-р сургуулийн сурагч А.Мөнхзул, Шинэ хөгжил сургуулийн сурагч Э.Батхүү нар удаах байруудыг эзлэв.

**B1.** Тэгш өнцөгт координатын системд өгсөн гурвалжны оройн цэгүүд нь  $A(p; q), B(t; u), C(r, s)$  байв. Уг гурвалжны талуудын дундаж цэгүүд нь  $M(-2; 1), N(2; -1), P(3; 2)$  болно. Тэгвэл  $p + q + r + s + t + u$  утга хэд гарах вэ?

**B2.** Дараалсан таван тооны нийлбэр нь  $10^{2018}$  байв. Тэгвэл голын тоог ол.

**B3.**  $x + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^3 = 1$  систем тэгшитгэлийг бод.

**B4.** Хоёр сурагч 32 шагайнаас авсан шагайн тоо нь 1 эсвэл анхны тоо байхаар ээлжлэн авч тогложээ. Сүүлчийн хэсэг шагайг авсан нь хожих бол хэн нь хожих вэ?

**B5.**  $ABC$  гурвалжны  $AB$  талын дундаж  $D$  цэг, харгалзан  $CA, CB$  талууд дээр орших дурын  $E, F$  цэгийн хувьд  $DEF$  гурвалжны талбай  $DBF; DAE$  гурвалжнуудын талбайн нийлбэрээс хэтрэхгүй гэж батал.

## **9-р анги**

*9-р ангийн төрөлд 34 сурагч оролцон 12-р сургуулийн сурагч Г.Тэнүүн түрүүлж, Шинэ хөгжил сургуулийн сурагч Г.Хүслэн-Эрдэнэ, Баяндун сургуулийн сурагч М.Наранзул нар удаах байруудыг эзэлсэн.*

**C1.**  $x$  ба  $y$  бүхэл утганд  $f(x+y) = f(x)f(y)$  байх  $f$  функц өгөв. Хэрэв  $f(1) = \frac{1}{2}$  бол  $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$  утгыг ол.

**C2.** Цифрүүд нь зүүнээс баруун тийш өсөх эрэмбэтэй ба цифр бүр нь уг тоог хуваадаг  $n$  тоог “олимпик” тоо гээ. Жишээ нь: 1236 нь “олимпик” тоо ба 2346 нь нь “олимпик” тоо биш. Учир нь  $4 \nmid 2346$

Бүх “олимпик” тоог ол.

**C3.** Катетууд нь бүхэл тоон урттай, гипотенуз нь  $\sqrt{2022}$  –тай тэнцүү урттай байх тэгш өнцөгт гурвалжин олдох уу.

**C4.**  $\sqrt{7-a} + \sqrt{7+a}$  бүхэл тоо байх бүх бодит  $a$  тоонуудыг ол.

**C5.** Хүснэгтийн хэсэг нүдийг хөрш нүднүүд нь ялгаатай байхаар 10 өнгөөр будав. Бүх боломжит будагдсан хөрш нүднүүдийн хос олддог байхаар хамгийн багадаа хэдэн нүд будах вэ?

## **10-р анги**

*10-р ангийн төрөлд 33 сурагч оролцон 5-р сургуулийн сурагч Б.Номин түрүүлж, 1-р сургуулийн сурагч Б.Балжмаа, 5-р сургуулийн сурагч Э.Энхмаа нар удаах байруудыг эзэлсэн.*

**D1.**  $x^2 - x - 2018 = 0$  тэгшитгэлийн язгуурууд нь  $m$  ба  $n$  байг. Тэгвэл  $n^2 + m$  утгыг ол.

**D2.**  $C_1; C_2$  тойргуудын радиус нь харгалзан  $r_1; r_2$  бөгөөд энэ хоёр тойрог 2 ерөнхий цэгтэй.  $C_1; C_2$  тойргуудыг зэрэг шүргэсэн  $l$  шулуун эдгээр тойргийг харгалзан  $T_1; T_2$  цэгүүдээр шүргэдэг гээ.  $T_1 T_2$  хэрчмийн  $P$  цэгийг дайрсан,  $l$  шулуунд перпендикуляр  $l'$  шулуун өгөгдсөн тойргуудыг нийт 4 цэгээр огтлох ба эдгээр цэгүүдийг эрэмбээр нь  $A, B, C, D$  гэвэл  $PA = AB = BC = CD$  болно. Тэгвэл  $\frac{r_1}{r_2}$  харьцааны авч болох бүх утгыг ол.

**D3.**  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  нийлбэр дурын натурал  $n$  –ийн хувьд хэдэн тэгээр төгсөж болох вэ?

**D4.**  $n \geq k$  үед  $C_n^k; C_{n+1}^k; \dots; C_{n+k}^k$  тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч нь 1 байхыг батал.

**D5.** 3, 7, 14, 24, ... дарааллын хувьд хөрш хоёр тооны ялгаваруудаар арифметик прогресс үүснэ. Тэгвэл өгөгдсөн дарааллын 100 дахь гишүүнийг ол.

## **11-р анги**

*11-р ангийн төрөлд 27 сурагч оролцон Цагаан-Овоо сургуулийн сурагч Б.Бат-Эрдэнэ түрүүлж, 8-р сургуулийн сурагч М.Хэрлэн, 5-р сургуулийн сурагч Т.Ундармаа нар удаах байруудыг эзлэв.*

**E1.**  $p$  сондгой тоо бол  $(p-1)(p^n+1) = 4m(m+1)$  байх  $(m, n)$  эерэг бүхэл хосуудыг ол.

**E2.**  $4x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 22x - 2 = 0$  тэгшитгэл дөрвөн ялгаатай бодит шийдтэй ба тэдгээрийн хоёрынх нь үржвэр -2 той тэнцүү байх бүх бодит  $S$  тоонуудыг ол.

**E3.** Оройн цэгүүд нь бүхэл координаттай адил талт гурвалжин (а) хавтгай дээр; (б) огторгуйд тус тус олдох уу.

**E4.** Усан санд гурван хоолой байв. Усан санг II ба III хоолойг зэрэг ажиллуулахад I ба II хоолойг зэрэг ажиллуулахаас 5 цаг 20 минут илүү хурдан хугацаанд дүүргэнэ. Хэрэв II хоолойгоор усан санд ус юүлж, харин III хоолойгоор ус гадагш юүлэхэд I ба II хоолойгоор зэрэг энэхүү усан сангаас 2 дахин их эзлэхүүнтэй усан санг дүүргэхээс 21/16 бага хугацаанд дүүргэдэг. I ба III хоолойг зэрэг ажиллуулахад 8 цагаас илүү хугацаа зарцуулдаг бол I ба II хоолойг зэрэг ажиллуулахад усан санг ямар хугацаанд дүүргэх вэ?

**E5.** Хэрэв  $p$  нь 7-оос их анхны тоо бол  $p^4 - 1$  нь 240-д хуваагдахыг батал.

## 12-р анги

12-р ангийн төрөлд 21 сурагч оролцон Чулуунхороот сургуулийн сурагч О.Өнөболд түрүүлж, Хан-Уул сургуулийн сурагч Э.Хонгорзул, Дорнод ахлах сургуулийн сурагч С.Түшигбаяр нар удаах байруудыг эзэлсэн.

**F1.** Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд  $O$  цэгт огтлолцоно. Зөвхөн  $AC \perp BD$  эсвэл аль нэг диагональ нь  $O$  цэгээр хагаслан хуваагддаг тохиолдолд  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$  тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

**F2.**  $n^5 + n^4 = 7^m - 1$  тэгшитгэлийн бүх эерэг бүхэл шийдийг ол.

**F3.**  $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$  тэгшитгэл бод.

**F4.** Гурван анхны тоо өгөгдсөн ба дурын хоёрынх нь үржвэр бүтэн квадратаас 6-аар их бол эдгээр тоонуудын нийлбэр нь бүтэн квадратаас 9-өөр их гэж батал

**F5.**  $x, y, z$  тоонуудын аль нь ч нөгөө хоёрынхоо нийлбэрийн косинустай тэнцүү бол  $x = y = z$  болохыг батал.

## Бага ангийн багш

Бага ангийн багш төрөлд 17 багш оролцон Flower сургуулийн багш Б.Цагаанхүүхэн түрүүлж, Шинэ хөгжил сургуулийн багш Э.Оюун-Эрдэнэ, 1-р сургуулийн багш П.Одончимэг нар удаах байруудыг эзэлсэн.

**G1.** Нэгж ирмэгтэй кубын хөрш хоёр талсын солбисон диагоналиудын хоорондох зайг ол.

**G2.**  $||4^x - 3| - 2| = 1$  тэгшитгэл хэдэн бодит шийдтэй вэ?

**G3.** 2018-ын 25% ба 25-ын 2018%-ийн нийлбэр хэд вэ?

**G4.** Нүднүүд нь шатрын хөлөг шиг хар, цагаан өнгөөр алаглан будагдсан  $20 \times 20$  хэмжээтэй хөлгийн яг 150 ширхэг нүдний өнгийг эсрэгээр нь өөрчилж буджээ (харыг цагаанаар, цагааныг хараар будна). Тэгэхэд хөлгийн мөр багана бүрд ижил тооны хар өнгөтэй нүд байж болох уу?

**G5.** Багш самбарт 5 ширхэг нартурал тоо бичээд, сурагчдад бичсэн 4 тооны нийлбэрийг олох даалгавар өгчээ. Сурагчид боломжит аргаар энэ нийлбэрийг олоход зөвхөн 2017, 2018, 2019, 2020 гэсэн нийлбэрүүд гарчээ. Багш самбарт ямар тоонууд бичсэн бэ.

## Математикийн багш

Математикийн багш төрөлд 32 багш оролцон Дашбалбар сумын багш Б.Батсайхан түрүүлж, 8-р сургуулийн багш Г.Михлай, 1-р сургуулийн багш Б.Батзориг нар удаах байруудыг эзэлсэн.

**H1.**  $a$  өгөгдсөн тоо,  $\forall x \in R$   $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$  бол  $f(x)$  үетэй гэж харуул.

**H2.**  $11^n + n^2 + 71 = m^2$  байх бүх натурал  $m, n$  тоонуудыг ол.

**H3.** Хавтгайд огтлолцсон хоёр тойрог өгөгджээ.  $A$  нь огтлолцлын цэгүүдийн нэг байг. Тойрог бүрд диаметр татахдаа нөгөө тойргийн  $A$  цэгт татсан шүргэгчтэй паралель байхаар татжээ. Эдгээр диаметрууд огтлолцдоггүй бол диаметруудийн төгсгөлийн цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

**H4.** Хэрэв  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  байвал  $tg^2 \frac{\alpha}{2} + tg^2 \frac{\beta}{2} + tg^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$  болохыг батал.

**H5.**  $n^2 + 59n + 881$  бүтэн квадрат байх бүхэл  $n$ -г ол.