

# АБТА, П.ЭРДЭНЭЦЭЦЭГИЙН НЭРЭМЖИТ, УЛЗ САВ НУТГИЙН МАТЕМАТИКИЙН 29 ДҮГЭЭР ОЛИМПИАД

2020 оны 10 сарын 10

## 7-р анги

**A1.**  $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{2020}) = ?$

**A2.** Аялагч А хотоос В хот хүртэл 3 өдөр явжээ. Эхний өдөр бүх замын  $\frac{7}{20}$ -г, хоёр дахь өдөр үлдсэн замын  $\frac{8}{13}$ -г, гурав дахь өдөр эхний өдрийнхөөс 72 км дутуу зам явжээ. А ба В хотын хоорондох зайг ол.

**A3.**  $a, b$  талууд бүхий тэгш өнцөгтийн өргөнийг 10%-иар нэмэгдүүлж, уртыг 10%-иар багасгавал талбай нь хэдэн хувиар өөрчлөгдөх вэ?

**A4.** 2020 ба  $n$  тооны нийлбэр 11 ба 17-д зэрэг хуваагддаг бол  $n$  тоо хамгийн багадаа хэд байх вэ?

**A5.** Гурван хүү ширээ тойрон суугаад самар цөмж гэнэ. Отгон хүүг 3 самар цөмөхөд дунд хүү 4 самар цөмдөг, харин дунд хүү 3 самар цөмөхөд том хүү 5 самар цөмдөг байв. Тэд гурвуулаа нийлээд 2460 самар цөмсөн бол дунд хүү хэдэн самар цөмсөн бэ?

**A6.**  $n$  нь гурван оронтой тоо.  $n$  дээр 3-г нэмэхэд гарсан тооны цифрүүдийн нийлбэр нь  $n$ -ийн цифрүүдийн нийлбэрийн  $\frac{1}{3}$ -тэй тэнцүү бол ийм чанартай бүх  $n$  тоог ол.

**A7.**  $a$  талтай  $ABCD$  квадратын  $AB$  тал дээр  $P$  цэгийг,  $BC$  тал дээр  $Q$  цэгийг,  $CD$  тал дээр  $R$  цэгийг,  $AD$  тал дээр  $S$  цэгийг тус тус авав. Хэрэв  $AP + AS + CQ + CR = 2a$  байсан бол  $PR = QS$  гэж батал.

**A8.** Гар бөмбөгийн тэмцээнд 8 баг оролцож хоорондоо тойргоор тогложээ. Нэг тоглолтод хожсон баг 1 оноо, хожигдсон баг 0 оноо авна. Тэмцээний дараа А,В багуудын нийт оноо С, D багуудын авсан нийт оноотой тэнцүү байх А,В,С, D багууд олдохыг батал.

## 8-р анги

**B1.**  $\frac{9x+23}{x+1}$  бүхэл тоо бол  $x$ -ийн авч болох бүхэл тоон утгуудын нийлбэрийг ол.

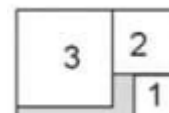
**B2.** 2 см, 4 см, 6 см, ...18 см урттай хэрчмүүдээр хичнээн элдэв талт гурвалжин үүсгэж болох вэ?

**B3.** Тэгш өнцөгтөд гурван өөр хэмжээтэй квадрат зурагт үзүүлсэн байдалтай багтжээ.

Тэгш өнцөгтийн талбай 228 см<sup>2</sup> бөгөөд уртынх нь  $\frac{8}{19}$ -тай 2 дугаартай квадратын тал

тэнцүү. Тэгш өнцөгтийн өргөнийх нь  $\frac{1}{3}$ -тэй 1 дугаартай квадратын тал тэнцүү бол

будагдсан хэсгийн талбайг ол.



**B4.** Тэрэлжид очсон жуулчид бүгд морь унахыг хүссэн боловч байсан морьд нь тэдний  $\frac{10}{13}$ -д хүрэлцжээ. Бүх жуулчид, бүх морьд нийлээд 990 хөлтэй бол хэдэн жуулчин морьгүй хоцорсон бэ?

**B5.**  $1234567899 \cdot 1234567894 \cdot 1234567892$  үржвэрээс  $1234567891 \cdot 1234567896 \cdot 1234567898$  үржвэрийг хасахад хэд гарах вэ?

**B6.**  $x^2 - x - 3 = 0$  тэгшитгэлийн шийд  $a$  бол  $\frac{a^3+1}{a^5-a^4-a^3+a^2}$  илэрхийллийн утгыг ол.

**B7.** Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрт нь натурал тоо бичигдсэн 3x3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ. Хаа нэгтээ 9 бичигдсэн шидэт квадратыг гүйцээж бөглө. /бүх боломжит хувилбарыг дүрслэ./

	11	
		5

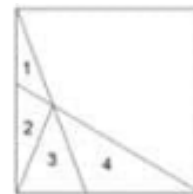
**B8.** Хүүхдийн зуслан 6 сарын 10-наас 8 сарын 31 хүртэл амрагчид хүлээн авдаг бөгөөд сурагчид ямар ч өдөр очиж, 14 хоног амраад буцдаг. Энэ зусланд нэг ангийн 26 сурагч нэг, нэг удаа очиж амарчээ. Ангийн сурагчдын аль нэг зургаа нь зуслан дээр нэг өдөр хамт амарсан гэдгийг харуул. ( 6 сар 30 хоногтой, харин 7 ба 8 сар 31 хоногтой.)

## 9-р анги

C1.  $\begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$  систем тэгшитгэл бод.

C2.  $a, b, c, d$  нь  $\frac{33}{5} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$  байх натурал тоонууд бол  $a + b + c + d$  утгыг ол.

C3. Зурагт үзүүлсэн квадрат дахь 1 ба 2 дүрсийн талбай тэнцүү, 4 нь 3-аас 2 дахин их талбайтай, 1,2,3-ын талбайн нийлбэр 9, 1 ба 3,4-ийн талбайн нийлбэр 7 бол 1,2,3,4 дүрсүүдийн талбайн нийлбэрийг ол.



C4.  $\left(\frac{21}{n} - 2\right)^2 - 2\left(\frac{21}{n} - 2\right) = n + 42$  нөхцлийг хангах хамгийн их бүхэл  $n$  тоог ол.

C5.  $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$  тэгшитгэлийн бүх бодит шийдийг ол.  $[x]$ - нь  $x$  тооны бүхэл хэсэг.

C6.  $n!$  нь  $k$  ширхэг 0 цифрээр төгсдөг натурал  $n$  тоо олддоггүй бол натурал  $k$  тоог ОНЦГОЙ ТОО гээ. Онцгой тоонуудыг багаас нь их руу жагсааж бичихэд 55-д ямар тоо бичигдэх вэ?

C7.  $n \cdot 17^n + 1$  тоо 9-д хуваагдаж байх  $n$ -ийн бүх натурал утгыг ол.

C8. Талууд нь бүхэл тоон урттай дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. Хэрэв аль ч талын урт нь үлдсэн гурван талынхаа нийлбэрийг хуваадаг бол ижил урттай 2 тал олдохыг батал.

## 10-р анги

D1. 3 ширхэг “а”, 2 ширхэг “в” үсэг бичсэн 5 ширхэг цаасыг доош нь харуулан тавьжээ. Санамсаргүйгээр 2 цаасыг дараалан авахад “ав” гэсэн үг үүсэх боломжийг тоол. “аав” гэсэн үг үүсэх боломжийг тоол.

D2. А хотоос морьтой хүн, В хотоос дугуйтай хүн зэрэг угталцан гарчээ. 5 цагийн дараа хоорондох зай нь 80 км болсон ба дахин 4 цагийн дараа тэдний хоорондох зай 80 км болжээ. А ба В хотын хоорондох зайг ол.

D3.  $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$  бол  $S_{2020}$ -г ол.

D4. Цифрүүдийнхээ факториалын нийлбэртэй тэнцүү байдаг бүх гурван оронтой тоог ол. ( тооны факториал гэдэг нь  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  байна. )

D5.  $R$  радиустай тойрогт багтсан гурвалжны оройнууд нь тойргийг 2:5:17 харьцаагаар хуваажээ. Гурвалжны талбайг ол.

D6.  $f(x); g(x); h(x)$  нь квадрат гурван гишүүнтүүд байв. Тэгвэл  $f(g(h(x))) = 0$  тэгшитгэл нь 1,2,3,4,5,6,7 ба 8 гэсэн шийдүүдтэй байж болох уу.

D7. Төгс тоо натурал тооны квадрат болж чадахгүйг батал. Өөрийн бүх хуваагчдын нийлбэртэй тэнцүү байдаг тоог төгс тоо гэнэ. Ж нь:  $6=1+2+3$

D8.  $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$  тэгшитгэл бод.

## 11-р анги

**E1.**  $|x - 1| - |x + 2| = 3$  тэгшитгэл бод.

**E2.**  $2x + \frac{1}{x} = 3$  бол  $16x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

**E3.** Гурван хоолойтой усан сангийн I ба III хоолой зэрэг ажиллавал I ба II хоолой зэрэг ажилласнаас 5 цаг 20 минутаар богино хугацаанд дүүрнэ. II хоолойгоор ус юүлж, III хоолойгоор соруулбал усанг дүүргэх хугацаа I ба II хоолойгоор энэхүү усан сангаас 2 дахин том усанг дүүргэхээс  $\frac{21}{16}$  цагаар бага байна. I ба III хоолой зэрэг ажиллавал 8-аас олон цаг зарцуулдаг бол I ба II хоолой зэрэг ажиллахад усан сан ямар хугацаанд дүүрэх вэ?

**E4.**  $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$  ( $= 3^0; 3^1; 3^0 + 3^1; 3^2; 3^0 + 3^2; 3^1 + 3^2; 3^0 + 3^1 + 3^2; \dots$ ) гэсэн өсөх эрэмбэтэй тоон дараалал нь 3-ын зэрэгтээс болон боломжит бүх зэрэгтийн нийлбэрээс бүтнэ. Тэгвэл дарааллын 100-р тоо хэд байж болох вэ?

**E5.** 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$
 систем тэгшитгэл бод.

**E6.** Бүх талс нь будагтай кубыг 1000 ширхэг тэнцүү кубэд хуваав. Эдгээр кубуудээс таамгаар 1-г сонгоход ядаж 2 талс нь будагтай куб таарах боломжийг тоол.

**E7.**  $a$  талтай  $ABCD$  квадратын  $AB; BC; DA$  тал дээр харгалзан  $M, N, K$  цэгийг  $AM = MB; 2BN = NC; 2DK = KA$  байхаар аваад  $MC; NK$  хоёр хэрчмийн хоорондох өнцгийн синусыг ол.

**E8.** Натурал тоо  $n$  дээр түүний өөрөөс нь ялгаатай хамгийн их хуваагчыг нэмэхэд 10-ын зэрэгт гарсан бол  $n$  тоог ол.

## 12-р анги

**F1.** Хоёр хайлшинд алт, мөнгө 2:3, 3:7 харьцаатай байв. 5:11 харьцаатай шинэ хайлш бэлтгэхэд дээрх хоёр хайлшнаас ямар хэмжээтэй авбал зохих вэ?

**F2.**  $\left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{2}{5}\right] + \left[\frac{3}{5}\right] + \dots + \left[\frac{2019}{5}\right] + \left[\frac{2020}{5}\right] =$  утгыг ол.  $[x]$  нь  $x$  тооны бүхэл хэсэг

**F3.**  $a + b + c + ab + bc + ca + abc = \overline{abc}$  байх бүх гурван оронтой тоог ол.

**F4.** Таны баруун халаасанд 3 ширхэг 20-тийн, 4 ширхэг 15-тийн мөнгө, харин зүүн халаасанд 6 ширхэг 6 ширхэг 20-тийн, 3 ширхэг 15-тийн мөнгө байжээ. Баруун халааснаас таамгаар 3 мөнгө авч зүүн халаасандаа хийгээд зүүн халааснаас таамгаар нэг мөнгө авахад тэр нь 20-тийн мөнгө байх үзэгдлийн магадлал болон зүүн халааснаас 20-тийн мөнгө гарсан бол баруун халааснаас 2 ширхэг 20-тийн, 1 ширхэг 15-тийн мөнгө гарсан байх магадлалыг ол.

**F5.**  $\{x_n\}$  дараалал  $x_1 = 2; x_2 = 8; x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$  рекурент томъёогоор өгөгдөв. Дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бич.

**F6.** Хавтгайд огтлолцсон хоёр тойрог өгөгджээ.  $A$  нь огтлолцлын цэгүүдийн нэг байг. Тойрог бүрд диаметр татахдаа нөгөө тойргийн  $A$  цэгт татсан шүргэгчтэй паралель байхаар татжээ. Эдгээр диаметрууд огтлолцдоггүй бол диаметруудийн төгсгөлийн цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

**F7.**  $a, b, c > 0$  бол  $\frac{7}{1+a} + \frac{9}{1+a+b} + \frac{36}{1+a+b+c} \leq 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.  $a, b, c$  -ийн ямар утганд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

**F8.**  $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  тэгшитгэлийн бодит шийдийг ол.

## Бага ангийн багш

**G1.** Шинэ лийр 80% чийгтэй. Хатаасны дараа 5% чийгтэй. 8кг хатаасан лийр бэлтгэхийн тулд хэдэн кг шинэ лийр авах вэ?

**G2.**  $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 8$  илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

**G3.**  $n$  нь гурван оронтой тоо.  $n$  дээр 3-г нэмэхэд гарсан тооны цифрүүдийн нийлбэр нь  $n$ -ийн цифрүүдийн нийлбэрийн  $\frac{1}{3}$ -тэй тэнцүү бол ийм чанартай бүх  $n$  тоог ол.

**G4.** 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$
 тэгшитгэл бод.

**G5.** Гүдгэр таван өнцөгтийн диагоналиудыг татахад үүсэх захын гурвалжнуудын талбай тэнцүү бол таван өнцөгтийн талбайг ол.

**G6.** Хуудас цаасыг 8 хэсэг эсвэл 16 хэсэг болгон хуваана. Үүссэн хэсгүүдийг 8 юмуу 16 хэсэг болгон хуваана. Ийм маягаар  $n$  хэсэг цаасыг гарган авч чадахгүй,  $n$ -ээс их аливаа хэсэг цаасыг гарган авч чаддаг байх хамгийн бага  $n$  тоог ол.

**G7.** Бат, Цэцэг, Дорж гуравт нийт 100 чихэр байжээ. Эхлээд Бат 1 чихэр идээд, үлдсэн чихрийнхээ талыг Цэцэгт өгчээ. Дараа нь Цэцэг 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийнхээ талыг Доржид өгчээ. Эцэст нь Дорж 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийнхээ талыг Батад өгөв. Тэгэхэд Бат, Цэцэг хоёр анх байсан чихэртэйгээ ижил тооны чихэртэй болсон бол хэдэн чихэртэй байсан бэ?

**G8.** Дэс дараалсан 17 ширхэг натурал тоо өгөгджээ. Эдгээр тоонуудын аль нэг хоёрын үржвэр нь үлдсэн 15 тооны нийлбэрийн  $\frac{1}{3}$ -тэй тэнцүү байв. Өгөгдсөн тоонуудаас хамгийн бага тоо нь хэд байх боломжтой вэ?

## Математикийн багш

**H1.** Тариа хураах ажлыг 100 хүн 10 өдөрт хийж дуусгадаг байв. Эхлээд 80 хүнтэй бригад хагас өдөр ажиллажээ. Үлдсэн ажлыг 45 хүнтэй бригад хэдэн өдөр ажилласны дараа 20 хүнтэй бригад нэмэгдэн ирж хамтран ажиллаад нийт 20 өдөрт хийж дуусгав. 20 хүнтэй бригад хэдэн өдөр ажилласан бэ? /Бүх хүний хөдөлмөрийн бүтээмж ижил/

**H2.**  $y = e^{kx}$  функц  $k$ -ийн ямар утганд  $2y''' - 11y'' - 19y' - 14y = 0$  тэнцэтгэлийг хангах вэ?

**H3.**  $f(x) = x^2 + ax + b$  квадрат гурван гишүүнт өгөгдөв.  $(0; 1)$  завсраас  $p \neq -\frac{a}{2}$  ба  $f(b - f(p)) > f(p)$  байхаар  $p$  цэг авав. Тэгвэл  $(0; 1)$  завсраас  $q \neq p$  байх  $q$  цэгийг  $f(p) = f(q)$  байхаар авч болохыг батал.

**H4.** Тэнгист хоорондоо огтлолцох шулуун замуудаар 2 усан онгоц тогтмол хурдтай хөвж байв. 9.00 цагт тэдгээрийн хоорондох зай 6 миль, 10.00 цагт хоорондох зай нь 5 миль, харин 11.00 цагт хоорондоо 2 миль зайтай байв. Тэгвэл онгоцнуудын хоорондох зай хэдэн цагт хамгийн их байх вэ?

**H5.**  $a_1; a_2; \dots; a_{99}$  эерэг бодит тоонууд нь  $1 \leq i < j \leq 99$  байх  $i, j$  бүрийн хувьд  $ia_j + ja_i \geq i + j$  нөхцөл хангадаг бол  $(a_1 + 1)(a_2 + 2) \cdot \dots \cdot (a_{99} + 99) \geq 100!$  гэж батал.

**H6.**  $f(x); g(x); h(x)$  нь квадрат гурван гишүүнтүүд байв. Тэгвэл  $f(g(h(x))) = 0$  тэгшитгэл нь 1,2,3,4,5,6,7 ба 8 гэсэн шийдүүдтэй байж болох уу.

**H7.** 1,2,3, ..., 18 тоонуудыг тойрог дээр аль ч дараалсан  $a, b, c$  тоонуудын хувьд  $b^2 - ac : 19$  байхаар хичнээн янзаар байрлуулж болох вэ? (эргүүлэлт, тэгш хэмээр бие биедээ шилждэг байгуулалтыг нэг байгуулалт гэж тооцно.)

**H8.**  $n$  натурал тоо байг. Нэг шоог  $n$  удаа хаяхад гарсан нүднүүдийн хамгийн их ерөнхий хуваагчийг  $G$  гэвэл  $G = 1$  байх магадлалыг ол.