

# БАЯН-УУЛ СУМЫН СУРГУУЛИЙН МАТЕМАТИКИЙН БАГШ, АБТА Т.ДАШНЯМЫН НЭРЭМЖИТ, УЛЗ САВ НУТГИЙН МАТЕМАТИКИЙН 30 ДУГААР ОЛИМПИАД

## 7-р анги

**A1.** Тэгш өнцөгтийн нэг талыг 25%-иар ихэсгэв. Нөгөө талыг хэдэн хувиар бууруулбал тэгш өнцөгтийн талбай үл өөрчлөгдөх вэ?

**A2.** Дөрвөн хулуунаас бүх боломжит хосыг сонгож жинлэхэд 7кг, 8кг, 9кг, 10кг, 11кг, 12кг жинтэй байв. Бүх хулуу нийлээд хэдэн кг бэ?

**A3.** Дөрвөн өөр эерэг бүхэл  $p, q, r, s$  тоо нь  $(9 - p)(9 - q)(9 - r)(9 - s) = 9$  тэгшитгэлийг хангана.

$p + q + r + s$  нийлбэрийг ол.

**A4.** Зогсоолоос голын урсгал дагуу А суурин хүрэхээр нэг завь, урсгал сөрж В суурин хүрэхээр өөр нэг завь зэрэг хөдлөв. Завинууд А болон В суурингуудад харгалзан 5 ба 9 цагийн дараа хүрсэн бөгөөд хүрсэн даруйдаа хоёул буцаж В ба А суурин хүрэхээр хөдөлсөн байна. Ингээд зогсоолоос голын урсгал дагуу 20 км зайд уулзжээ. А ба В суурингийн хоорондох зай 200 км бол голын урсгалын хурдыг ол.

**A5.** Самбарт 5 тоо цувуулан бичсэн ба эхний байранд 2, хамгийн арын байранд 12 тоог бичжээ. Уг таван тооны эхний 3 тооны үржвэр 30, дундах 3 тооны үржвэр 90, сүүлийн 3 тооны үржвэр 360 бол дундах 3 тооны нийлбэрийг ол.

**A6.** Дугуй ширээ тойрон зулу болон бушмен нийлсэн зуун хүн суусан байжээ. Ширээний ард суусан хүний, хоёр хөрш нь өөртэй нь нэг үндэстнийх байвал тэр хүн үнэн ярина. Бусад тохиолдолд худал ярьдаг байв. Ширээ тойрон суусан хүн бүр “Миний хажуугийн хүмүүсээс яг нэг нь үнэн ярьдаг ” гэж хэлцгээсэн бол тэдний хэдэд нь итгэж болох вэ?

## 8-р анги

**B1.** 11 натурал тоог нэг эгнээнд бичсэн байв. Аль ч дараалсан гурван тооны нийлбэр 21-тэй тэнцүү ба хамгийн эхний тоо 7-той, 9-р байрны тоо 6-тай тус тус тэнцүү бол 2-р байранд бичигдсэн тоог ол.

**B2.** Хавтгай дээр 7 см ба 11 см радуистай ерөнхий төвтэй хоёр тойрог өгөгдөв. Том тойргийн хөвчийг жижиг тойрог тэнцүү урттай гурван хэрчимд хуваадаг бол уг хөвчийн уртыг ол.

**B3.** Тус бүр нь  $2n$  ширхэгтэй гурван төрлийн юмсыг хоёр хүнд тэнцүү хувааж өгөх аргын тоог ол.

**B4.** А ба В хотоос угталцан 2 автобус зэрэг гарчээ. 7 цагийн дараа тэдний хоорондох зай 136 км байв. 2 хотын хоорондох замыг 1-р автобус 12 цаг, 2-р автобус 10 цаг авсан бол хоёр хотын хоорондох зайг ол.

**B5.** Гурван оронтой тоог түүний цифрүүдийн нийлбэрт хуваахад дандаа нэгэн үлдэгдэл гардаг дүрэмтэй гэвэл гарч болох хамгийн их үлдэгдэл хэд байж болох вэ?

**B6.** Тойрог дээр 100 цэг тэмдэглэгдсэн байв. Хоёр хүүхэд эдгээр цэгүүдийг ээлж ээлжээр өмнө татсан хэрчимтэй огтолцоогүй хэрчмээр холбож тоглов. Хэрэв өөрийнхөө ээлжинд хэрчим татаж чадахгүй болсон нь хожигдох бол хэн нь хожих вэ? Тэр хожихын тулд хэрхэн тоглох ёстой вэ?

## 9-р анги

**C1.** Болд шатрын тэмцээнд оролцож 52 өрөг тогложээ. Хуучин үнэлгээний систем нь хожвол 1 оноо, тэнцвэл 0,5 оноо, хожигдвол 0 оноо өгдөг ба Болд 35 оноотой болсон байв. Гэтэл шинэ үнэлгээний систем нь хожвол 1 оноо, тэнцвэл 0 оноо, хожигдвол -1 оноо өгдөг бол Болд шинэ үнэлгээний системээр хэдэн оноотой болох вэ?

**C2.** 2021 гэсэн тооны баруун ба зүүн талд нэг нэг цифр бичиж зургаан оронтой тоо үүсгэв. Үүссэн тоо нь 28-д хуваагддаг бол үүссэн тооны цифрүүдийн нийлбэр хамгийн багадаа хэдтэй тэнцүү байж болох вэ?

**C3.** Дурын  $n \geq 2$  натурал тооны хувьд  $n^2$  ба  $(n+1)^2$  тоонуудын хооронд орших бөгөөд  $a^2 + b^2$  нь  $c$ -д хуваагддаг байх  $a, b, c$  ялгаатай гурван тоо оршин байхыг батал.

**C4.**  $1 \times 1$  талбайтай квадрат дээр (дотор ба хүрээн дээр) 1975 цэг тэмдэглэжээ.  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$  тахир шугамын урт  $\frac{9}{16}$ -өөс үл хэтрэх 8 цэг олдохыг үзүүл.

**C5.** Гадна талаараа шүргэлцсэн тойргийг 1 урттай талтай квадратад багтаасан. Тэгвэл тойргийн радиусуудын нийлбэр хэд байх вэ?

**C6.**  $A = \{-3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\}$  олонлогоос 2 тоо санамсаргүй сонгов. /нэг тоог дахин сонгож болно./ Уг тоог  $x, y$  гэвэл  $\vec{a}(x, y)$  вектор 1-р мөчид орших магадлалыг ол.

## 10-р анги

**D1.**  $y = x^2 + bx + c$ ;  $y = x^2 + cx + b$  функцуудын график зурагт үзүүлснээр зурагдвал тэгшитгэлүүдийг бич.

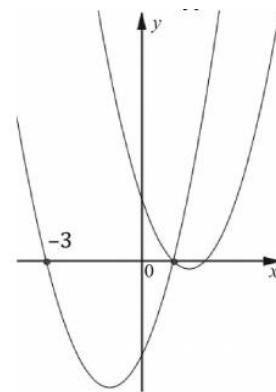
**D2.**  $2xy + 3y^2 = 24$  тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

**D3.**  $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = x$  тэгшитгэл бод.

**D4.** Тэгш өнцөгт гурвалжны тэгш өнцгийн биссектрисс нь гипотенузэд буулгасан медиан ба өндөр хоёрын хоорондох өнцгийг хагаслан хуваана гэдгийг батал.

**D5.**  $a, b, c$  нь периметр нь 1-тэй тэнцүү гурвалжны талууд бол  $\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geq 12$  гэж батал.

**D6.** Гүдгэр таван өнцөгтийн диагоналиудыг татахад үүсэх захын гурвалжнуудын талбай тэнцүү бол таван өнцөгтийн талбайг ол.



## 11-р анги

**E1.**  $x, y, z$  нь эерэг ба  $x + y + z = 6$  бол  $x^2 + y^2 + z^2 + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6 \cdot xyz - 12$  гэж батал.

**E2.**  $ABCD$  параллелограмын  $CD, DA$  ба  $AB$  талуудын дундаж цэгүүд нь  $E, F, G$  болно.  $DFE$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AB$  талыг  $G$  цэгт шүргэнэ. Тэгвэл  $AB = \sqrt{2} \cdot AD$  гэж батал.

**E3.** Ангийн сурагчдыг баг бүр нь 3 гишүүнтэй ба аль ч хоёр баг нь нэгээс ихгүй ерөнхий гишүүнтэй байхаар багуудад хуваасан гэе. Хэрэв анги 46 сурагчтай байсан бол аль ч гурав нь нь нэг багт ороогүй байх 10 сурагчдыг сонгож болохыг батал.

**E4.** 3-т хуваагддаг бөгөөд 6 гэсэн цифрээр төгсдөг 5 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

**E5.**  $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$  байх бүх, бүхэл бодит  $x$  тоонуудыг ол.

**E6.**  $9[x] - 48\{x\} = 0$  тэгшитгэл хэдэн шийдтэй вэ?

## 12-р анги

**F1.**  $\frac{n^2+1}{2m}$  бүхэл тоо бөгөөд  $2^{n-1} + m + 4$  бүтэн квадрат байх бүх  $n, m$  натурал тоог ол.

**F2.**  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  нийлбэр дурын натурал  $n$ -ийн хувьд хэдэн тэгээр төгсөж болох вэ?

**F3.**  $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$  тэгшитгэлийн сөрөг биш бүхэл шийдүүдийг ол

**F4.**  $ABC$  гурвалжны багтаасан тойргийн дурын  $P$  цэгээс  $AB$  ба  $AC$  шулуунуудад харгалзан  $PM$  ба  $PN$  перпендикулярууд буулгав.  $|MN|$  хамгийн урт байх  $P$  цэгийн байрлалыг тогтоо. Хамгийн их уртыг ол.

**F5.**  $\{a_n\}$  өсдөг арифметик прогресс натурал тооны кубыг агуулдаг, натурал тооны дөрвөн зэрэгтийг агуулдаг бол мөн натурал тооны 12 зэрэгтийг агуулна гэж батал.

**F6.** Тус бүр 1 кг-аас хэтрэхгүй хэсэг чулууны нийт жин 20 кг-аас үл хэтрэнэ. 3 кг даацтай жигнүүрээр хамгийн цөөндөө хичнээн удаа жигнэж нийт шулууны жинг мэдэж болох вэ?

## Бага ангийн багш

**G1.** Чойбалсан хотоос өглөөний 6:20 цагт гарсан улаан автобус Чингис хотод өглөөний 11:50 цагт очжээ. Чингис хотоос өглөөний 3:35 цагт гарсан цэнхэр автобус Чойбалсан хотод өглөөний 9:20 цагт иржээ. Автобусууд тогтмол хурдтай, зогсохгүй явсан гэж үзвэл тэд хэдэн цагт зөрсөн бэ?

**G2.** Иванов их сургуулийн багш болоод жилд нэг удаа эрдэм шинжилгээний өгүүлэл бичих болжээ. Арван таван жилийн дараа тэрээр профессор болж жилд хоёр өгүүлэл бичих болов. Хэдэн жилийн дараа их сургуулийн удирдлага профессоруудыг жилдээ 4 өгүүлэл зайлшгүй бичих ёстой гэсэн дүрэм гаргаж Иванов ч энэ дүрмийг арван жил биелүүлж гэнэ. Их сургуулийн удирдлагаас профессорийн жилийн өгүүллийн нормыг таваар тогтоосны дараа Иванов нэг жил ажиллаад 70-тайдаа тэтгэвэртээ гарчээ. Иванов ажиллах хугацаандаа нийт 90 өгүүлэл бичсэн байв. Тэгвэл тэр хэдэн настайдаа анх их сургуулийн багш болсон бэ?

**G3.** Гурвалжны талууд нь 52,56,60 см байв. Уг гурвалжны их талтай паралель шулуунаар уг гурвалжинг огтлоход үүсэх дөрвөн өнцөгтийн периметр 156 см бол уг дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.

**G4.** Гурван цифр нь тэгш, гурван цифр нь сондгой байх 6 оронтой тооны тоог ол.

**G5.** Үнэг өөрийнхөө харайлтаар 60 харайх зайтай газраас нохойд хөөгдөж зугтжээ. Үнэгний 7 харайх газрыг нохой 3 харайна. Харин үнэг 9 харайх хугацаанд нохой 6 харайна. Нохой хэд харайгаад үнэгийг гүйцэх вэ?

**G6.** Хэрэв дөрвөн оронтой тоо  $a$  ба  $b$  тоонуудын хувьд  $b$  тооны зүүн талд  $a$  тоог бичихэд үүссэн 8 оронтой тоо  $ab$ -д хуваагдаж байх  $a, b$  тоонуудыг ол.

## Дунд ангийн багш

**H1.**  $n$  натурал тооны дурын ялгаатай хоёр хуваагчийн үржвэр  $n$ -д хуваагддаг эсвэл  $n$ -ийн хуваагч болдог бол уг тоог “гоё тоо” гээ. Тэгвэл  $2 \leq n \leq 50$  байх бүх “гоё тоо”-нуудын тоог ол.

$$\text{H2. } \begin{cases} x^5 + 10x^2y + 5x = 5x^4y + 10x^3 + y \\ y^5 + 10y^2z + 5y = 5y^4z + 10y^3 + z \\ z^5 + 10z^2x + 5z = 5z^4x + 10z^3 + x \end{cases} \quad (1) \text{ системийн бүх шийдийг тоол.}$$

**H3.**  $ABC$  гурвалжны  $\alpha, \beta, \gamma$  өнцгийн биссектрисүүд багтаасан тойргийг харгалзан  $A_1, B_1, C_1$  цэгүүдэд огтолно. Тэгвэл  $|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |BC| + |CA|$  болохыг батал.

**Н4.**  $\frac{107811}{3}$  ;  $\frac{110778111}{3}$  ;  $\frac{111077781111}{3}$  ; ... дарааллын ерөнхий гишүүнийг  $a_n$  гэвэл  $p|a_n$  байх  $p$  анхны тоо бүрийн хувьд  $p^3 | a_n$  болохыг батал.

**Н5.**  $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y$  бүх шийдийг ол.

**Н6.** Бүх тал нь тэнцүү олон өнцөгтийн оройнууд нь бүхэл координаттай байв. Тэгвэл энэ болон өнцөгт тэгш тооны талтай гэж батал.