

# НАЙМДУГААР ОЛИМПИАД

Улз сав нутгийн математикийн наймдугаар олимпиад 1999 оны 10 сарын 12-15-ны өдрүүдэд Баянтүмэн сумын 8 жилийн сургууль дээр зохион явагдлаа. Энэ олимпиадад Хэнтий аймгийн баг оролцож зүүн бүсийн хэмжээний олимпиад болон өргөжлөө.

## 7-р анги

Энэ төрөлд 22 сурагч оролцон 27 оноогоор Хэнтий аймгийн 1-р сургуулийн сурагч Баатарын Дэлгэрмаа түрүүлж, 16 оноогоор 12-р сургуулийн сурагч Баярсайханы Тэнгис, Мэдлэг сургуулийн сурагч Энхтайваны Ганцолмон нар удаах байрыг эзлэв.

**A1.**  $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}$  ба 4-ын аль нь их вэ?

**A2.** Та бид хоёрын нас нийлээд 63. Таны одоогийн насан дээр намйаг байх үеийн таны наснаас миний одоогийн нас 2 дахин их. Одоо та бид хоёр хэдэн настай вэ?

**A3.**  $a + b + c = 0$  бол  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  болохыг батал.

**A4.** 1999 онд төрсөн оныхоо цифрүүдийн нийлбэртэй тэнцүү настай хүний төрсөн оныг ол.

**A5.**  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  функцийн хамгийн бага утгыг ол.

**A6.** 25 төгрөгийг нэгт, гуравт, тавтын дэвсгэртүүдээр нийт дэвсгэртүүдийн тоо 10 байхаар задлаж болох уу.

## 8-р анги

Энэ төрөлд 25 сурагч оролцон 18 оноогоор 8-р сургуулийн сурагч Чулууны Болорчимээ түрүүлж, 12 оноогоор Хэнтий аймгийн сургуулийн сурагч Дэлгэрийн Дэлгэрбат, 15.5 оноогоор Хан-Уул сургуулийн сурагч Даваадоржийн Буянзаяа нар удаах байруудыг эзлэв.

**B1.**  $a + b + c = 0$  бол  $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$  болохыг батал.

**B2.**  $d_1; d_2; d_3$  гурвалжны зэрэгцээ орших талуудын ялгаврын абсолют хэмжигдхүүн,  $P$  нь периметр бол  $d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1 \leq \frac{P^2}{4}$  болохыг батал.

**B3.** Анги 28 сурагчидтай. Тэд 14 ширээнд хоёр хоёрооро суудаг. Багш сарл нэг удаа тэдний суудлыг солихдоо урьд нь хэзээ ч хамт суугаагүй хүүхдүүдийг нэг ширээнд суулгадаг ажээ. Хамгийн олондоо хэдэн сарын турш багш сурагчдынхаа суудлыг ингэж солих вэ?

**B4.** Гурвалжны бүх өндрүүдийн урт 1 см-ээс бага, харин талбай нь  $100 \text{ см}^2$ -аас их байж болох уу.

$$x + y + z = 3$$

**B5.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  тэгшитгэлийн систем бод.

$$x^4 + y^4 + z^4 = 17$$

**B6.** 1,2,3,4,5,6,7 гэсэн цифрүүдээр цифр бүхэн нэг удаа орсон байхаар 7 оронтой тоонуудыг зохиов. Эдгээр бүх болмжит тоонуудын нийлбэр 9-д хуваагдахыг батал.

## 9-р анги

Энэ төрөлд 17 сурагч оролцон 11 оноогоор Хэнтий аймгийн сургуулийн сурагч Баасанжавын Амараа түрүүлж, 10 оноогоор Баян-Уул сургуулийн Өлзийдэлгэрийн

Саран, 8.5 оноогоор Баяндун сургуулийн сурагч Мөнхжаргалын Мөнхтулга нар удаах байруудыг эзлэв.

**C1.** Хотод 10 паралель гудамж, тэднийг тэгш өнцгөөр огтолсон өөр 10 гудамж байдаг ба замын бүх огтлолцолыг дайрсан битүү зам хамгийн багадаа хичнээн эргэлттэй байх вэ?

**C2.**  $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$  тэгшитгэл бод.

**C3.** Эхний гишүүн нь 7, ялгавар нь 4 байх арифметик прогресс нь төгсгөлгүй олон анхны тоон гишүүдтэй болохыг батал.

**C4.**  $abc = 1; a^3 > 36$  бол  $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$  болохыг батал.

$$x + y + xy = 19$$

**C5.**  $y + z + yz = 11$  тэгшитгэлийн систем бод.

$$z + x + zx = 14$$

**C6.** Гурвалжны талууд  $a, b, c$  ба  $\angle A = 60^\circ$  бол талууд нь  $\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}$  хамааралтай болохыг батал.

## 10-р анги

Энэ төрөлд 17 сурагч оролцон 19.5 оноогоор Дашбалбар сургуулийн сурагч Борхүүгийн Цэрнням түрүүлж, 13 оноогоор Хэнтий аймгийн сургуулийн сурагч Шагдарын Ариунболд, Баяндун сургуулийн сурагч Энхбатын Энхмаа нар дэд байрыг эзлэв.

**D1.** Хэрэв  $A, B, C$  нь гурвалжны дотоод өнцгүүд,  $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$  харьцааг хангадаг бол тэдгээрийн нэг  $120^\circ$  болохыг батал.

**D2.**  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1$  байх эерэг дарааллын хувьд  $(\frac{1}{a_1} - 1)(\frac{1}{a_2} - 1)\dots(\frac{1}{a_n} - 1) \geq (n^2 - 1)^n$  гэж

батал.

**D3.**  $f: R \rightarrow R$  функц  $f(3+x) = f(3-x)$  нөхцлийг хангадаг ба 6 ялгаатай бодит язгууртай бол тэдгээрийн нийлбэрийг ол.

**D4.**  $\sin(\cos x)$  ба  $\cos(\sin x)$  аль нь их вэ?

**D5.**  $1 \text{ м}^3$  эзлэхүүнтэй тэгш өнцөгт паралелопипидийн эсрэг орших 2 таслыг нэг төрлийн материалаар хийсэн ба бусад 4 талсыг түүнээс 8 дахин бага үнэтэй материалаар хийв. Хамгийн бага үнэтэй материал зарцуулахын тулд паралелопипидын хэмжээсүүд ямар байх вэ?

**D6.**  $[\frac{2x-1}{3}] = [\frac{x+1}{2}]$  тэгшитгэл бод.

## Бага ангийн багш

Энэ төрөлд 21 багш оролцон 22.5 оноогоор 8-р сургуулийн багш Базарсадын Хулан түрүүлж, 21.5 оноогоор Хэнтий аймгийн сургуулийн багш Сэнгээбаатарын Мөнхтуяа, 18.5 оноогоор 1-р сургуулийн багш Нямжавын Дэлгэрмаа нар удаах байруудыг эзлэв.

**E1.** 40 дм радиустай тойрог замаар 18 см радиустай дугуй өнхөрнө. Дугуйнд нэг хадаас хадагдсан бөгөөд тэр нь тойрог замд мөрөө үлдээнэ. Хадаас урьд гаргасан мөрөн дээгүүрээ дахин өнгөрөх болтол тойрог зам дээгүүр хэдэн удаа өнхрөх вэ?

**E2.** 1, 2, 3, ..., 10 тоонуудын аль ч дараалсан гурвын нийлбэр 15-аас хэтрэхгүй байхаар байрлуулж болох уу. Хариугаа тайлбарла.

**E3.**  $S$  талбайтай  $ABC$  гурвалжны  $BK$  медиан дээр  $M$  цэгийг  $BM = 6MK$  байхаар авчээ.  $AM$  шулууны  $BC$  талтай огтлолцох цэг нь  $N$  бол  $ANC$  гурвалжны талбайг ол.

**E4.** Нэг ангийн хичээлд ирээгүй сурагчдын тоо ирсэн сурагчдын тооны  $1/6$  болж байв. Ангиас нэг сурагч гараад явчихсны дараа ирээгүй сурагчдын тоо ирсний  $1/5$  болжээ. Анги хэдэн сурагчтай вэ?

**E5.**  $xy + 3x - 5 = -3$  тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

**E6.** Эхний 2 цифр нь хоорондоо тэнцүү, мөн сүүлчийн 2 цифр нь хоорондоо тэнцүү байх гүйцэд квадрат болох 4 оронтой тоог ол.

### Дунд ангийн багш

*Дунд ангийн багш нарын олимпиадад 15 багш оролцон 15.5 оноогоор 8-р сургуулийн багш Рэнцэндагвын Мөнхзул түрүүлж, 13 оноогоор Баяндун сургуулийн багш Доёдын Ганбаатар, 10 оноогоор Дашбалбар сургуулийн багш Гарамын Аюур нар удаах байруудыг эзлэв.*

**F1.**  $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos x \cos 2x \cos 4x = s$  тэгшитгэлийг бод.

**F2.**  $f(x)$  функц нь 0 ба 1-ээс бусад бүх бодит тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон ба дурын  $x$ -ын хувьд  $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$  тэнцэл биелнэ. Ийм бүх функцийг ол.

**F3.**  $ABCA_1B_1C_1$  зөв гурвалжин призмийн  $OO_1$  тэнхлэгийг 5:1 харьцаатай хуваах  $P$  цэг  $AB; A_1C_1$  ирмэгүүдийн дундаж цэгүүдийг дайруулан татсан хавтгай призмийн эзлэхүүнийг ямар харьцаатай хуваах вэ?

**F4.**  $a \neq 0; d$ -бүхэл тоо бол  $[ax^2 + bx + c] = d$  хэлбэрийн тэгшитгэл шийдтэй байх нөхцлийг тодорхойл.

**F5.** Аравтын бичлэгт нь тэг ороогүй эхний ба сүүлчийн гурван цифрүүдийн нийлбэр хоорондоо тэнцүү 8-ас бага байх 8 оронтой тоо хэд вэ?

**F6.**  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  тэгшитгэлийн арифметик прогресс үүсгэдэг гурван бодит язгууртай байхын тулд  $a, b, c$  тоонууд ямар нөхцөл хангах вэ?

### Баг-Олимпиад

1. /1-р сургууль Б.Ганбаяр/  $\left(\frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + 0.5 \sin y$  тэгшитгэл бод.

2. /5-р сургууль Э.Тунгалагтуяа/  $2^n + 1$  тоо гуравт хуваагдаж байх тийм бүх  $n$  тоог ол.

3. /8-р сургууль Р.Мөнхзул/ Гурван төрлийн тэжээл байв. 1-р тэжээлийн 30% нь ясны гурил 70% нь хивэг, 2-р тэжээлийн 80% нь хивэг 20% нь ясны гурил, 3-р тэжээлийн 50% нь хивэг 40% ясны гурил, 10% нь гурил байв. Эдгээрээс 15% нь гурил байх шинэ тэжээл бэлтгэхэд хамгийн багадаа хичнээн, хамгийн ихдээ хичнээн хувь нь хивэг байх вэ?

4. /Хан-Уул Б.Хүрэлбаатар/ 
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$$
 систем тэгшитгэл бод.

5. /12-р сургууль П.Энхцэцэг/ Радиус нь 1:3 харьцаатай шүргэлцсэн хоёр тойрог байв. Ерөнхий шүргэгч нь  $6\sqrt{3}$  бол үүсэх дүрсийн периметрийг ол.

6. /Баян-Уул Б.Батзориг/  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x = 0$  тэгшитгэл бод.

7. /Баяндун Д.Ганбаатар/ Хоёр цамхагийн орой руу харахад ижил өнцгөөр харагдах геометрийн байрыг ол.
8. /Баяндун Лхам/ Гуравт хуваагддаг бөгөөд 6 цифрээр төгсдөг таван оронтой тоо хичнээн байх вэ?
9. /Дашбалбар Г.Аюур/ Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудын үргэлжлэлүүд  $E, F$  цэгүүдэд огтлолцоно. Дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолын цэг  $O$ .  $EFO$  гурвалжны талбайг дөрвөн өнцөгтийн талбайтай жиш.
10. /Чойбалсан С.Баатар/  $ABCD$  паралелограммын  $BAD; CDA$  өнцгүүдийн биссектрисс  $BC$  талыг  $M, N$  цэгүүдэд харгалзан огтлоно.  $AM = 12; DN = 5$  бол  $AB$  талыг ол.
11. /Чулуунхороот П.Мягмаржав/  $x_1; x_2$  нь  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$  тэгшитгэлийн язгуурууд болог. Тэгвэл  $x_1^3; x_2^3$  нь  $y^2 - (a^3 - d^3 + 3abc + bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$  тэгшитгэлийн язгуурууд болохыг харуул.
12. /Хэнтий Тунгалаг/  $a, b, c, d$  талуудтай,  $S$  талбай бүхий дугуй багтаадаг гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгчээ.  $S \leq \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$  гэдгийг үзүүл.
13. /Цагаан-Овоо Б.Баттөмөр/  $a^2 + b^2 = 1$  байх  $a, b$  бодит тоонуудын хувьд  $-\sqrt{2} \leq a + b \leq \sqrt{2}$  үнэн болохыг батал.